

5. FILTROS DIGITAIS E APLICAÇÕES EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

Este capítulo aplica os conceitos da Transformada Discreta de Fourier para realizar a filtragem digital de sinais. Essa é uma área de muito interesse em sistemas de energia elétrica devido à possibilidade de automatização dos cálculos e realização "on-line" da monitoração usando processadores digitais. As principais aplicações são proteção e controle digital de processos, avaliação da qualidade de energia elétrica, cálculo de indicadores de qualidade, etc.

5.1. Transformada Z e Filtros Digitais

Conforme visto no capítulo anterior, um sinal $x(t)$, amostrado em intervalos regulares T , tem como Transformada de Fourier a seguinte série de funções complexas:

$$\mathfrak{F}(j\omega) = x_0 + x_1 e^{-j\omega T} + x_2 e^{-j\omega 2T} + x_3 e^{-j\omega 3T} + \dots$$

Analogamente, a Transformada de Laplace resulta:

$$L(s) = x_0 + x_1 e^{-sT} + x_2 e^{-s2T} + x_3 e^{-s3T} + \dots$$

que inclui amortecimento ($s = \sigma + j\omega$). O operador defasador e^{-sT} pode ser visto como um operador de retardo T entre amostras, denotado por:

$$e^{-sT} \cong Z^{-1} = e^{-(\sigma + j\omega)T} = e^{-\sigma T} \cdot e^{-j\omega T} = r \cdot e^{-j\theta}$$

consequentemente, $z = e^{sT}$ é um operador de avanço unitário T .

Define-se a transformada Z de um sinal amostrado com origem em $t = 0$ como:

$$G(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

Caso geral:
$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

Como se nota, a transformada Z do sinal amostrado é uma série de potências em z^{-1} , tendo como coeficiente as amostras temporais $[x_n]$. Cada amostra está posicionada na sequência através do número de retardos nT , representados pela potência de operador z correspondente, tomando a origem do tempo como referência.

Algumas dessas séries em z têm uma forma compacta como:

$$G(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} \dots = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Nessa forma, um único termo no denominador da função $G(z)$ representa um número infinito de amostras no tempo.

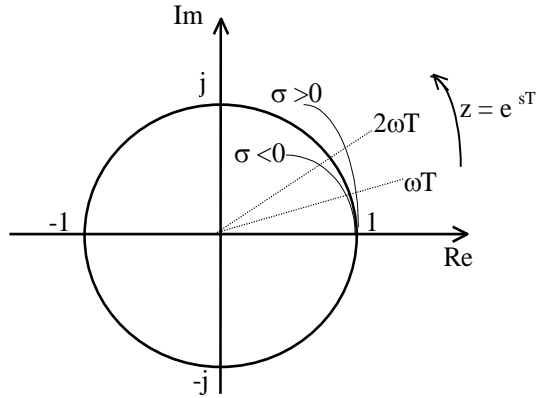


Figura 5.1 Círculo unitário e mapeamento da transformada Z.

$t := 0, 0.1..3$
 $w := 2 \quad \sigma := 0$
 $s(t) := e^{-(\sigma+w \cdot j) \cdot t}$

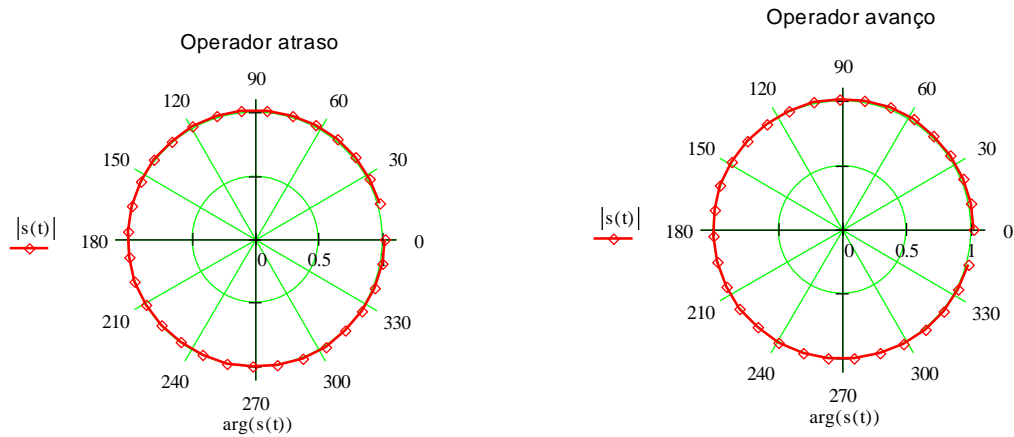


Figura 5.2 Posicionamento no plano complexo de amostras com diferentes atrasos

Dependendo do valor de a , a sequência pode ser convergente, constante ou divergente:

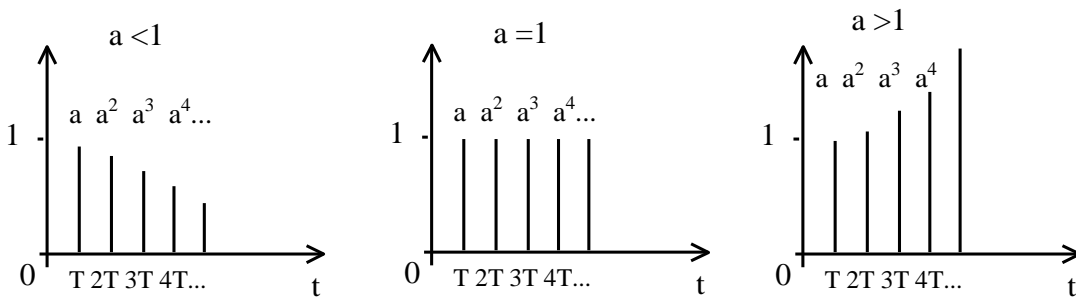


Figura 5.3 Séries convergente, constante e divergente.

5.2. Mapeamento de Polos e Zeros:

Sabe-se que a Transformada de Laplace mapeia polos e zeros de $F(s)$ no plano complexo $s = \sigma + j\omega$. De forma similar, a transformada Z mapeia polos e zeros de $G(z)$ no plano complexo:

$$z = r.e^{j\theta}$$

A condição de estabilidade no plano s é que os polos e zeros estejam no semiplano esquerdo, ou seja, $\sigma < 0$. Isto significa que os polos e zeros de Z estarão dentro do círculo unitário ($r < 1$).

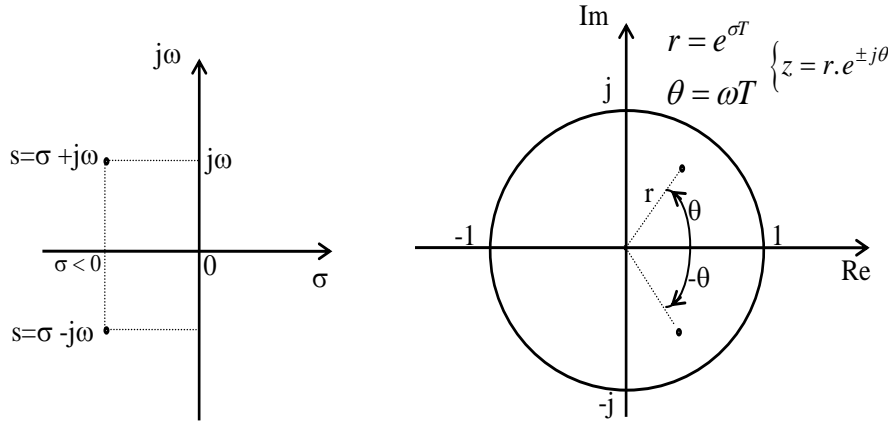


Figura 5.4 Planos complexos s e z .

5.3 Utilidade da Transformada Z

Considere-se um sistema em s cuja função de transferência é dada por: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$,

ou seja: $s Y(s) = X(s)$.

Essa equação em s corresponde à equação diferencial: $\frac{d y(t)}{d t} = x(t)$

Se o sinal de entrada do sistema for $x(t) = A.\cos(\omega t)$, resulta como saída ou resposta:

$$y(t) = \int^t x(\tau) d\tau = \int^t A \cos \omega \tau d\tau = \frac{A}{\omega} \text{sen } \omega t$$

Considerando um sistema similar com o operador z , a função de transferência do sistema discreto é: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z}$, ou seja: $z Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z) = z^{-1} X(z)$.

Esta última relação diz que a saída corresponde à entrada retardada de um intervalo T , ou seja: $y_k = x_{k-1}$ para $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

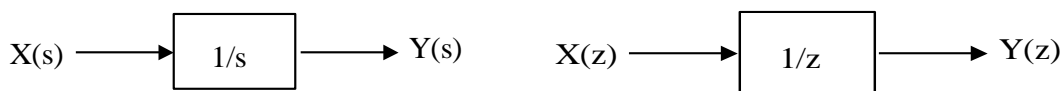


Figura 5.5 Analogia entre integrador (sistema contínuo) e atrasador (sistema discreto).

Se a entrada for uma senóide, percebe-se que não é para qualquer intervalo de amostragem T ou quantidade de atrasos que resulta na saída uma onda deslocada de 90° , ou seja, uma cossenóide, como no caso da integral contínua.

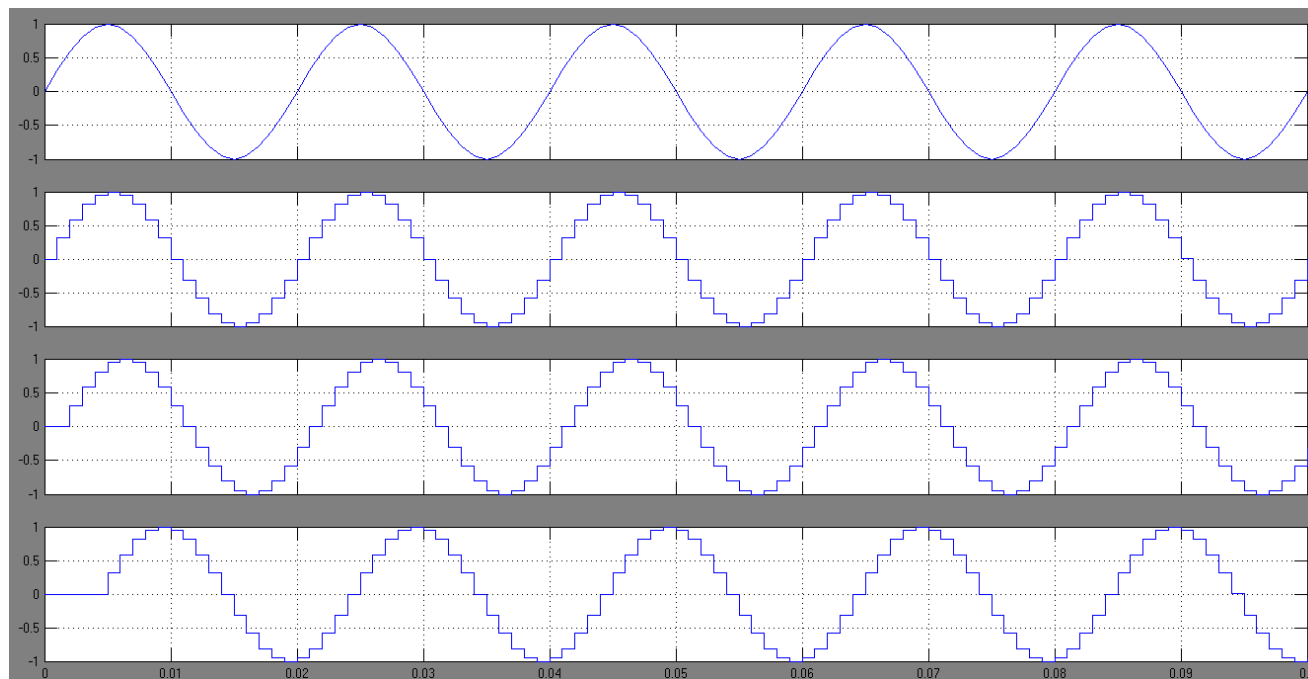


Figura 5.6 Efeito de atraso de uma e de quatro amostras em sinal senoidal: De cima para baixo: Sinal contínuo, sinal amostrado, sinal com atraso de uma amostra, sinal com atraso de quatro amostras.

A principal aplicação da transformada Z é na filtragem de sinais amostrados. No caso geral, a função de transferência em Z assume a seguinte forma polinomial:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

onde os coeficientes a e b determinam as características do sistema de ordem N . Usando a relação Saída /Entrada ou função de transferência acima, resulta:

$$Y(z) \cdot [1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_N z^{-N}] = X(z) \cdot [b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_N z^{-N}]$$

Lembrando que z^{-i} é um atrasador de i intervalos de amostragem, pode-se escrever a função resultante em um instante k qualquer como:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots a_N y_{k-N} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + b_2 x_{k-2} + \dots b_N x_{k-N}$$

ou seja, pode-se usar a seguinte relação recorrente para escrever a saída no instante k :

$$y_k = \sum_{n=0}^N b_n x_{k-n} - \sum_{n=1}^N a_n y_{k-n}$$

Esta recorrência pode ser representada graficamente da seguinte forma:

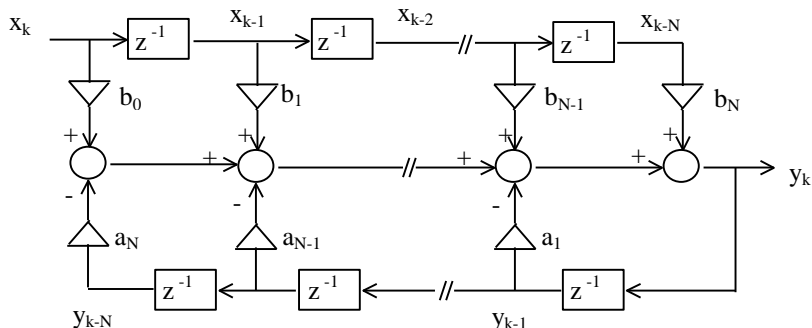


Figura 5.7 Filtro digital tipo IIR (*Infinite Impulse Response*).

Esta é uma estrutura de um filtro digital tipo IIR (*Infinite Impulse Response*). O nome é devido à característica de realimentação de saída, que força existência de sinal de saída mesmo depois que a entrada se anula. Se os termos de realimentação forem anulados $a_n = 0, n \geq 1$, resultam filtros tipo FIR (*Finite Impulse Response*), que só dependem da entrada:

$$y_k = \sum_{n=0}^N b_n \cdot x_{k-n}$$

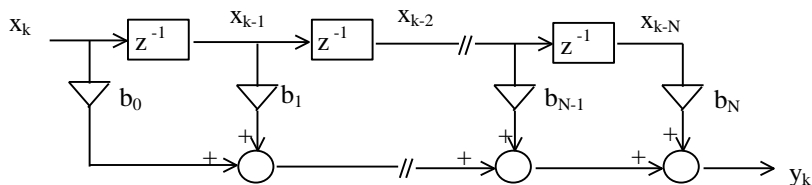


Figura 5.8 Estrutura de filtro FIR (*Finite Impulse Response*).

Do ponto de vista prático, tem-se agora dois tipos de problemas a resolver usando essas técnicas:

- a) análise de resposta de um sistema dado;
- b) síntese de um sistema que resulte em características desejadas.

O primeiro é um problema de análise de resposta, condições de estabilidade, controlabilidade, etc. do sistema em estudo. Portanto é um problema de controle aplicado a processos digitais.

O segundo é um problema de projeto, de compensação, ou seja, de filtragem digital.

O interesse principal neste curso é a filtragem digital de um sinal amostrado.

5.4 Transformações entre Sistemas Contínuos e Discretos

Um caminho para se chegar à representação de sinais discretos, a partir de sinais contínuos, é fazer algum tipo de transformação, preservando certas características básicas.

1 - Invariância de Impulso:

Essa transformação garante que as amostras coincidam com os valores da função contínua nos instantes amostrados:

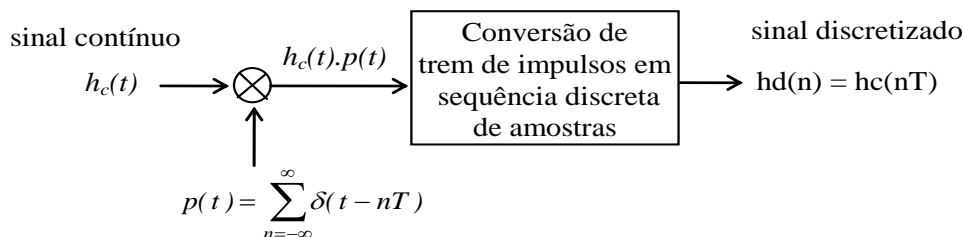


Figura 5.9 Processo de amostragem através de trem de impulsos.

Essa transformação permite escrever a Transformada Z de forma que resulta $z = e^{sT} = r e^{j\theta}$.

É comum que o ângulo θ do plano z seja chamado de frequência discreta para $\sigma = 0$, ou seja: $z = e^{j\Omega}$, onde $\Omega = \omega T$ mede o deslocamento angular básico que o operador ωT impõe.

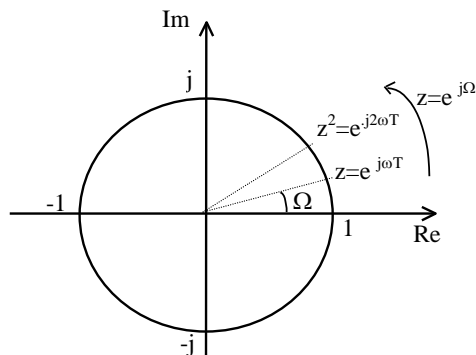


Figura 5.10 Deslocamento angular correspondente a atraso da amostra no tempo.

Essa transformação torna o espectro ($j\omega$) periódico $\left[\frac{-\pi}{T} a \frac{\pi}{T} \right]$ de forma que todo o espectro do sinal é mapeado conforme figura:

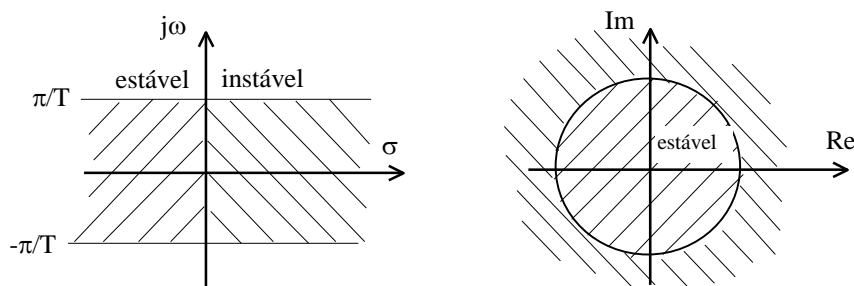


Figura 5.11 Regiões estáveis e instáveis nos planos s e z .

Essa transformação é limitada em frequência e, por isso, só é adequada para sinais abaixo da frequência de corte (filtros PB – passa-baixas).

Para obter esse tipo de transformação, basta tomar a função de transferência do sinal discretizado, e substituir e^{sT} por z .

Apesar de essa transformação facilitar o entendimento da relação entre sistema contínuo e discreto, sua aplicação é limitada pela restrição da faixa de passagem, e porque exige a obtenção da função de transferência em s do sinal amostrado para explicitar os termos e^{sT} .

Nas figuras que seguem, o pulso de amostragem tem duração de $1\mu s$, com um período de

amostragem de $625\mu\text{s}$. Desta forma, o fator de escala entre as componentes do espectro do sinal contínuo e do sinal amostrado é de 625 vezes (há 625 vezes menos energia no sinal amostrado do que no sinal contínuo), o que justifica a diferença na amplitude da fundamental. Posto que são 32 amostras por ciclo (de 50 Hz), a frequência de Nyquist é de 800 Hz, em torno da qual (e seus múltiplos) se dá a reflexão do espectro.

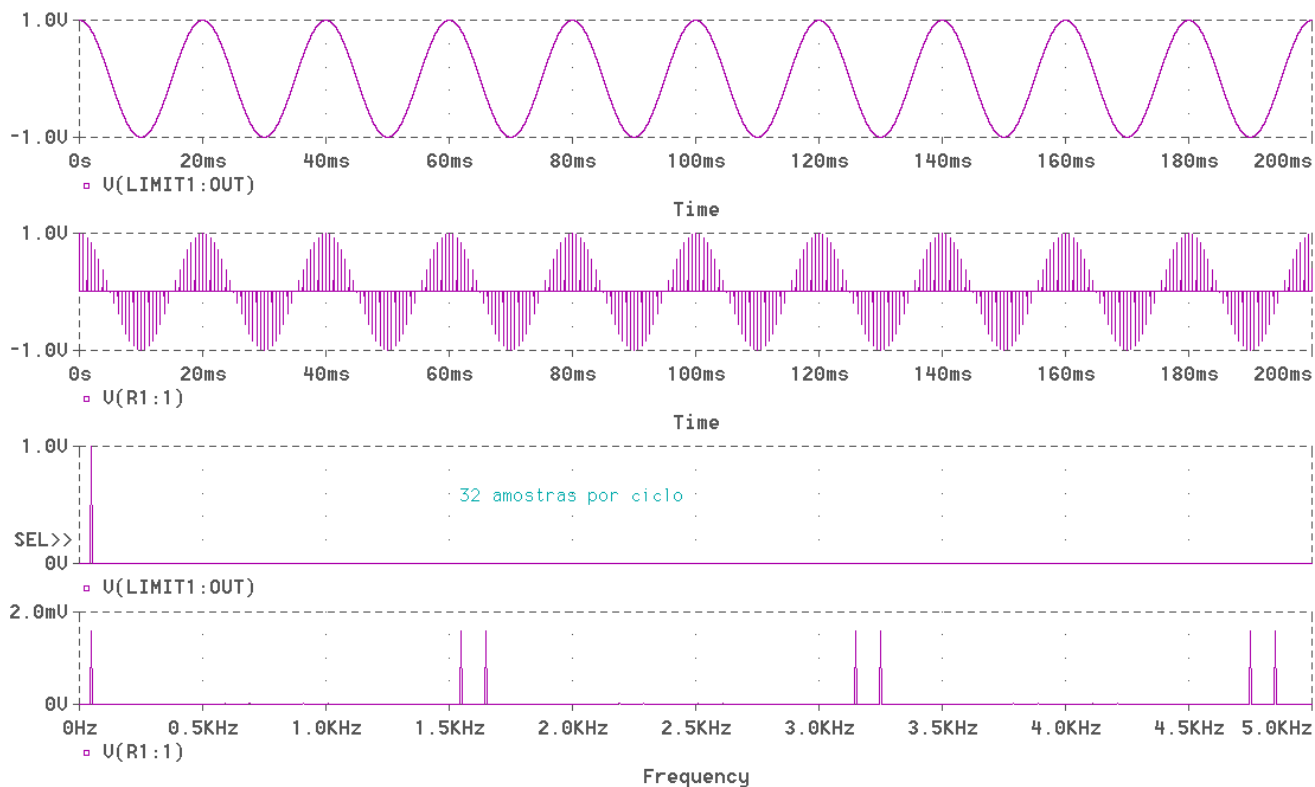


Figura 5.12 De cima para baixo: Sinal senoidal contínuo, sinal amostrado com pulso unitário, espectro do sinal contínuo e espectro do sinal amostrado.

Quando se faz a mesma análise de um sinal quadrado, observa-se o comportamento análogo, agora com a inclusão das componentes espectrais da própria onda quadrada, havendo uma interpenetração entre o espectro e suas reflexões, comprometendo a análise principalmente em frequências elevadas. Os valores para a fundamental são bastante próximos, considerando o fator de escala da amostragem. A fundamental da onda quadrada apresenta valor 1,273 V, enquanto o valor amostrado, aplicando o fator de escala resulta $2,028\text{ mV} \cdot 625 = 1,267\text{ V}$.

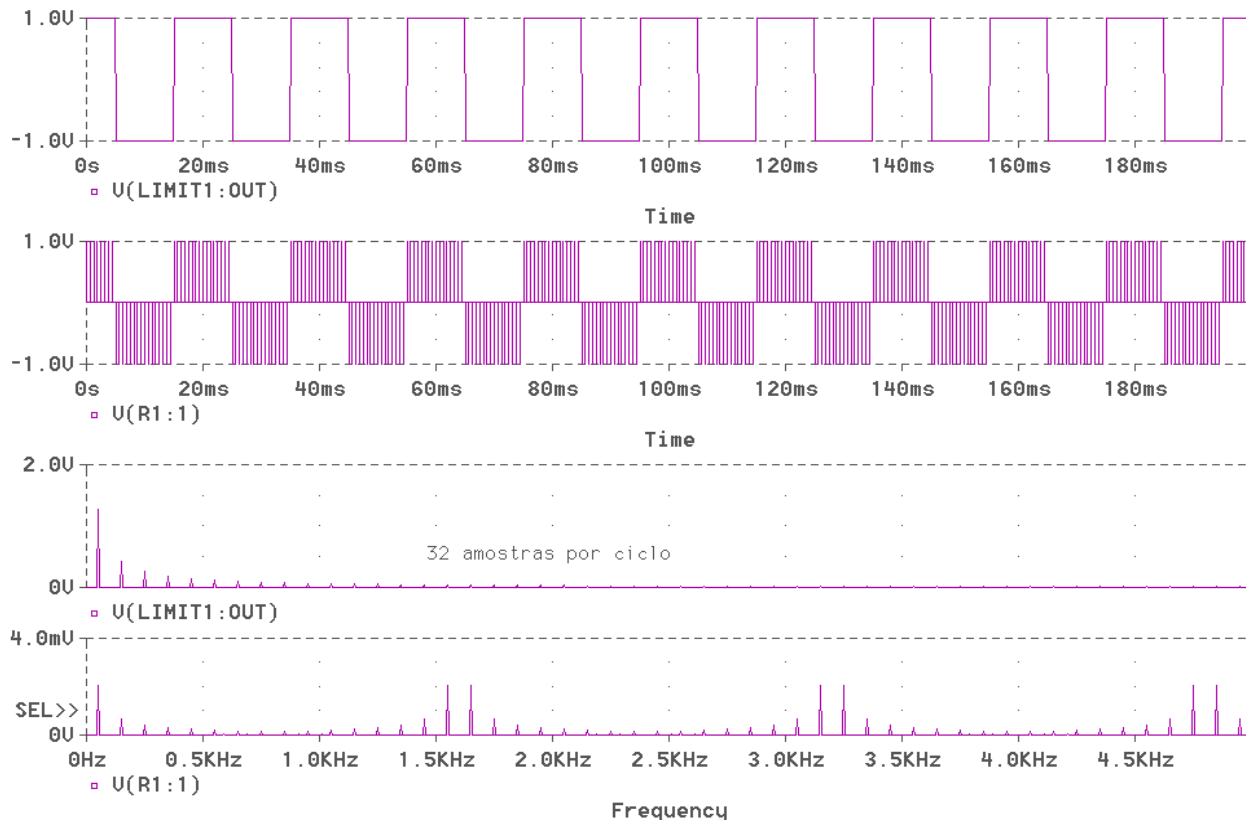


Figura 5.13 De cima para baixo: Sinal quadrado contínuo, sinal amostrado com pulso unitário, espectro do sinal contínuo e espectro do sinal amostrado.

2 - Aproximação pela equação a diferenças (*Backward-Difference Approximation*)

Um segundo método de transformação de sinal contínuo em discreto se baseia na aproximação da equação diferencial pela equação a diferenças, ou seja:

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_n - y_{n-1}}{T}$$

O sinal discretizado é considerado constante no valor amostrado até que ocorra uma nova amostragem. É o tipo de sinal que se obtém analogicamente a partir de um amostrador-segurador de ordem zero (*sample&hold*).

Exemplo 1:

Seja o sistema de 1ª ordem dado por: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$

Pela transformação de Laplace, tem-se: $sY(s) + aY(s) = X(s)$, que resulta na função de transferência contínua:

$$H_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + a}$$

Usando a equação a diferenças, resulta:
$$\frac{y_n - y_{n-1}}{T} + a y_n = x_n$$

Usando a propriedade de retardo da Transformada Z obtém-se:
$$\left[\frac{1-z^{-1}}{T} \right] Y(z) + a Y(z) = X(z)$$

e, portanto, a função de transferência discreta será:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$

Comparando-se as duas funções de transferência, vê-se que: $H_d(z) = H_c(s)|_{s=(1-z^{-1})/T}$, ou seja, dispendo da função de transferência em s pode-se, por substituição direta, obter $H(z)$.

Uma vez obtido $H(z)$, o caminho mais simples é colocar na forma polinomial: $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ e escrever a recorrência do tipo geral:

$$y_k = \sum_{n=0}^N b_n x_{k-n} - \sum_{n=1}^N a_n y_{k-n}$$

Exemplo 2:

Seja um filtro PB de 1ª ordem com Função de transferência em s : $H(s) = \frac{2}{s+5}$, calcular o filtro digital correspondente considerando $T = 0,02s$.

Na forma canônica tem-se:

$$H(s) = \frac{g}{1 + \tau \cdot s} = \frac{2/5}{1 + 1/5 s} \quad \text{logo} \begin{cases} \tau = 0.2 \\ g = 0.4 \end{cases}$$

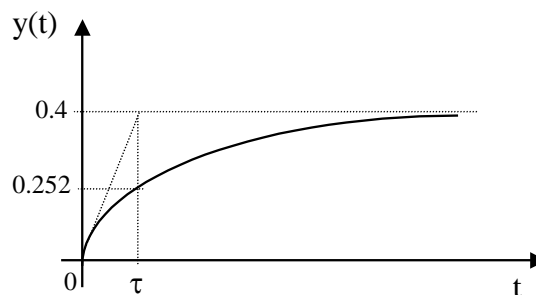


Figura 5.14 Resposta de filtro passa-baixas de primeira ordem a um degrau.

Fazendo a substituição $s = \frac{(1-z^{-1})}{T}$ resulta:

$$H(\tau) = \frac{2}{\frac{1-z^{-1}}{T} + 5} = \frac{2}{\frac{1-z^{-1}}{0,02} + 5} = \frac{0,04}{1-z^{-1} + 0,1} = \frac{0,04}{1,1-z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)(1,1-z^{-1}) = 0,04X(z)$$

$$1,1y_n - y_{n-1} = 0,04x_n$$

$$y_n = \frac{(0,04x_n + y_{n-1})}{1,1} = 0,03636x_n + 0,90909y_{n-1}$$

Os dez primeiros valores resultantes da recorrência são mostrados na tabela a seguir:

t	n	x_n	y_n
0	0	0	0
0.02	1	1	0.03636
0.04	2	1	0.06942
0.06	3	1	0.09947
0.08	4	1	0.12679
0.10	5	1	0.15163
0.12	6	1	0.17421
0.14	7	1	0.19473
0.16	8	1	0.21339
0.18	9	1	0.23036
0.20	10	1	0.24578

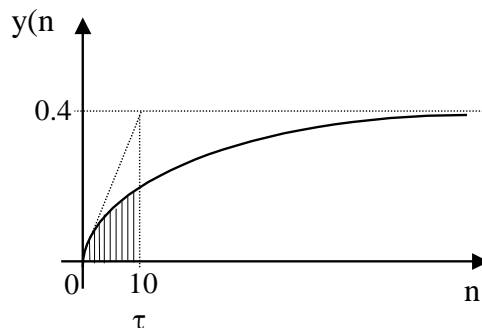


Figura 5.15 Primeiros 10 valores de saída do filtro digital.

Uma limitação dessa transformação é que não mapeia a região estável de s para toda a região interna do círculo unitário.

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \Rightarrow z = \frac{1}{1-sT}$$

Para $s = j\omega$ resulta:

$$z = \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + e^{j2tg^{-1}\omega T} \right]$$

Pois na forma polar tem-se que $[1 + j\omega T] = [1 + (\omega T)^2]^{1/2} \cdot e^{j2\text{tg}^{-1}\omega T}$.

Resulta do mapeamento um círculo de raio $1/2$ com origem em $z = 1/2$ e que percorre o círculo enquanto $-\infty < \omega < +\infty$.

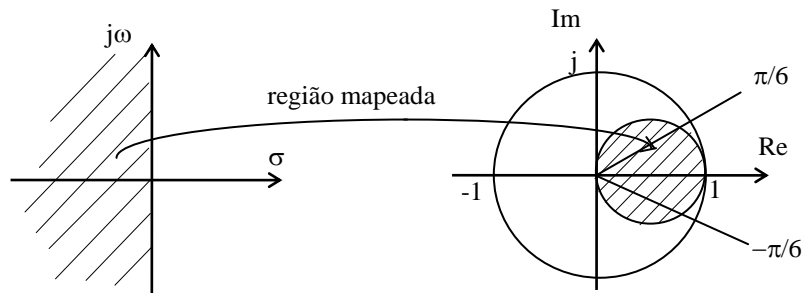


Figura 5.16 Mapeamento da transformada Z pela equação a diferenças.

Isto significa que o filtro obtido por essa transformação só é preciso para T pequeno, ou seja, se o sinal for sobreamostrado: ($\theta = \omega T \ll \pi/6$).

A figura a seguir mostra o efeito deste tipo de amostragem. Nota-se a boa qualidade na reprodução espectral, o que se deve à elevada taxa de amostragem. Praticamente não há erro no valor da harmônica e surgem pequenas componentes apenas em torno da frequência de amostragem (1600 Hz).

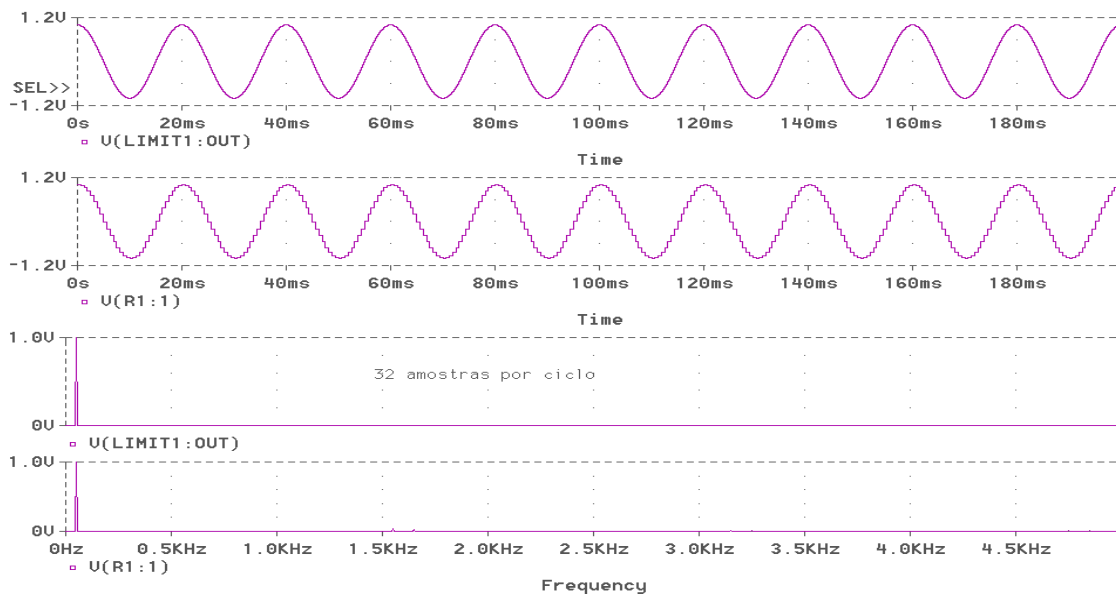


Figura 5.17 Amostragem do tipo amostrador-segurador de sinal senoidal. Formas de onda contínua e discretizada e respectivos espectros.

Fazendo a mesma análise para um sinal quadrado, as conclusões são as mesmas. Note-se que, neste caso, não se observa a reflexão do espectro, como ocorre com as amostras impulsivas pois o sinal, depois de amostrado, se torna contínuo.

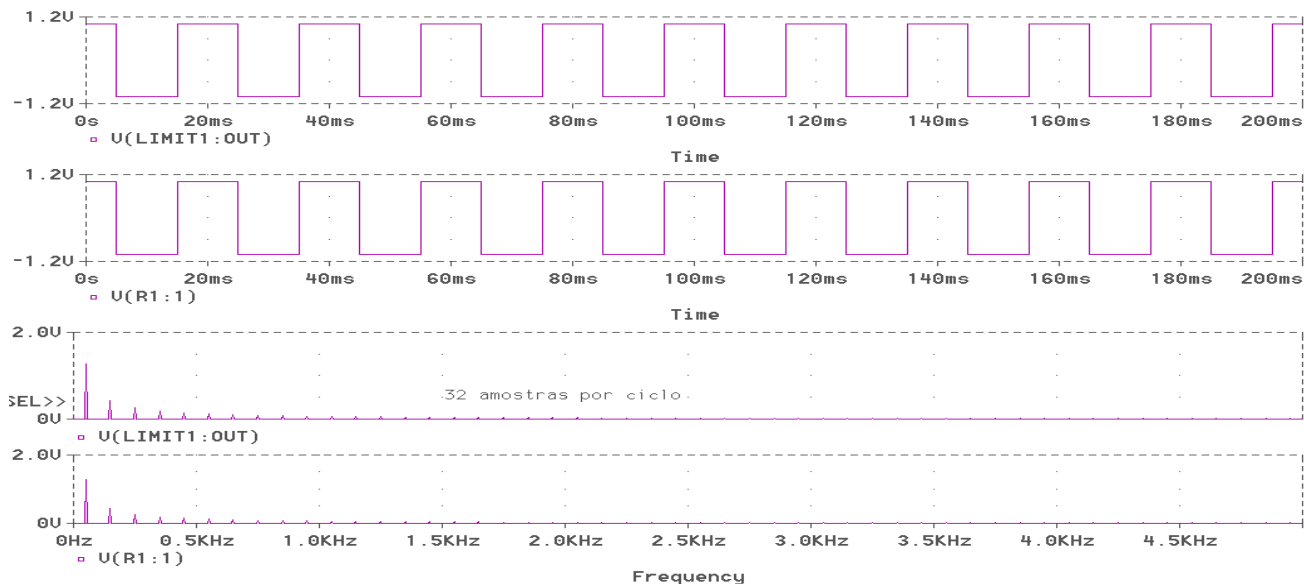


Figura 5.18 Amostragem do tipo amostrador-segurador de sinal quadrado. Formas de onda contínua e discretizada e respectivos espectros.

Ao se reduzir a quantidade de amostras, como ilustra a figura a seguir para 8 amostras por ciclo, o espectro obtido do sinal amostrado se altera, aparecendo componentes de baixa ordem, devido à amostragem, comprometendo o resultado.

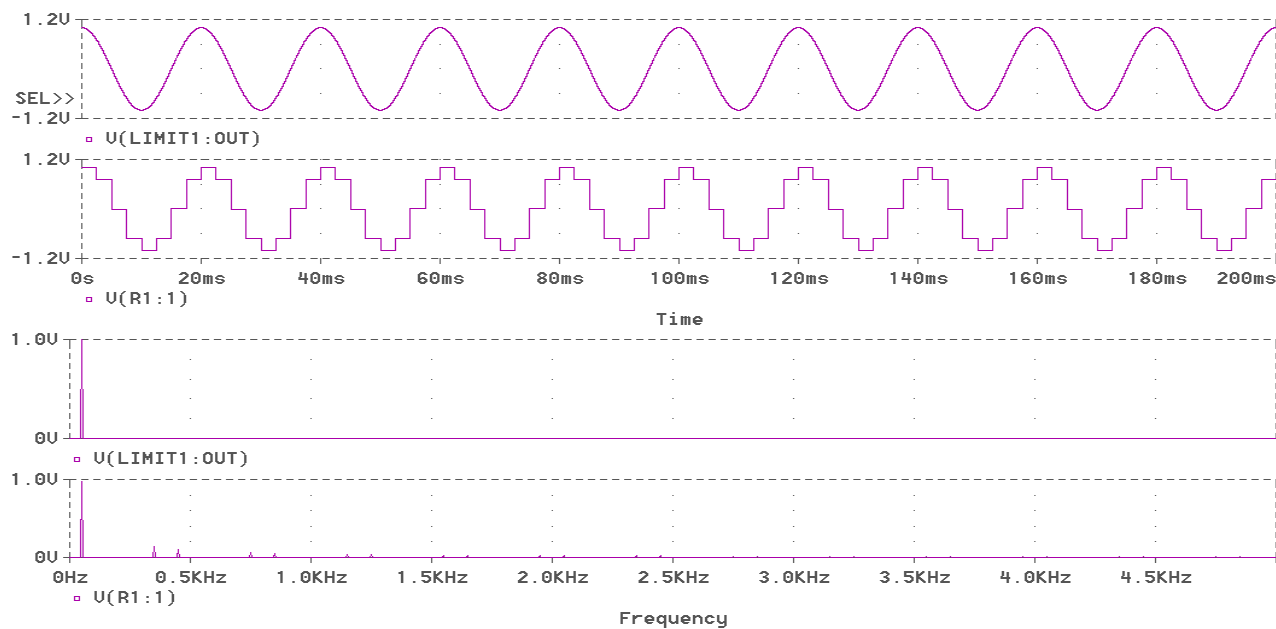


Figura 5.19 Amostragem do tipo amostrador-segurador de sinal senoidal. Formas de onda contínua e discretizada e respectivos espectros. Baixa quantidade de amostras.

Uma comparação entre o filtro contínuo (em s) e o filtro discretizado é mostrada a seguir, para diferentes formas de onda (degrau, quadrada e senóide). Como a taxa de amostragem é relativamente elevada, o erro é pequeno, tendendo a zero dentro de um período das ondas consideradas.

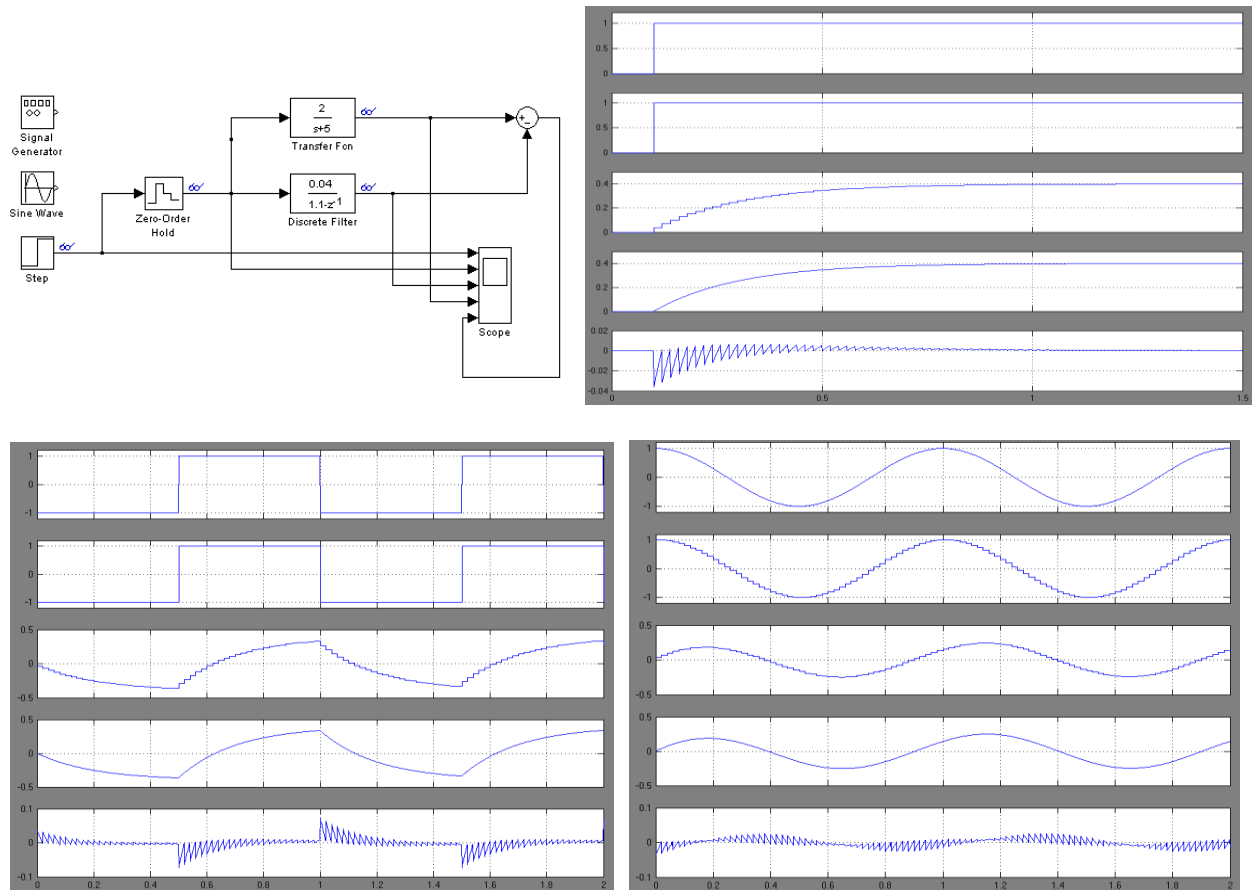


Figura 5.20 Comparação de filtros passa-baixas, linear e discretizado. Circuito simulado (Simulink), sinal de entrada, sinal amostrado, saída do filtro discreto, saída do filtro contínuo e erro entre os sinais filtrados.

3-Transformação Bilinear

$$s = \frac{2}{T} \times \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \times \frac{z - 1}{z + 1}$$

Esta é outra forma de transformação, bem mais utilizada, e que pode ser obtida a partir do método trapezoidal de integração:

$$\frac{d y(t)}{d t} = x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \frac{x(t) + x(t_0)}{2} \cdot T$$

discretizando:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{T}{2}(x_n + x_{n-1})$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \times \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

O equivalente em s para $\frac{d y(t)}{d t} = x(t)$ seria: $\frac{1 - z^{-1}}{T}$

Comparando H(s) e H(z) tem-se a equivalência:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = 2f_s \frac{z-1}{z+1}}$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1 + T/2 s}{1 - T/2 s}$$

Aplicando esta substituição no FPB anterior, a função de transferência em z se torna:

$$H(z) = \frac{0,04(1 + z^{-1})}{2,1 - 1,9z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Repetindo a simulação no Simulink, observa-se que há uma redução no erro entre a saída contínua e a obtida pelo filtro discreto.

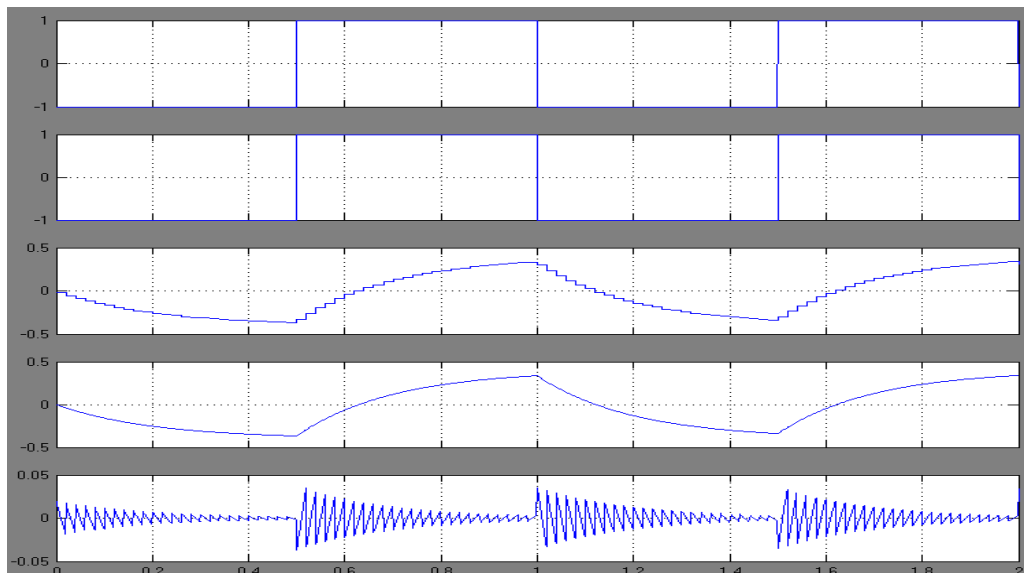


Figura 5.21 Comparação de filtros passa-baixas, linear e discretizado (bilinear). Sinal de entrada, sinal amostrado, saída do filtro discreto, saída do filtro contínuo e erro entre os sinais filtrados.

Para $s=\sigma+j\omega$ tem-se:
$$z = \frac{1 + \sigma T/2 + j\omega T/2}{1 - \sigma T/2 - j\omega T/2}$$

Para $\sigma=0$ resulta:

$$z = \frac{1 + j\omega T/2}{1 - j\omega T/2} = e^{j2tg^{-1}\omega T/2} \quad \text{que é o círculo unitário}$$

O círculo unitário, no entanto, é percorrido em função de ω de modo não linear, pois para:

$$z = e^{j\theta} = e^{j2tg^{-1}\omega T/2}$$

tem-se:

$$\frac{\theta}{2} = tg^{-1}\omega T/2$$

ou:

$$\omega = \frac{2}{T} tg \theta/2$$

θ	ω
0	0
$\pi/2$	$2/T$
π	∞

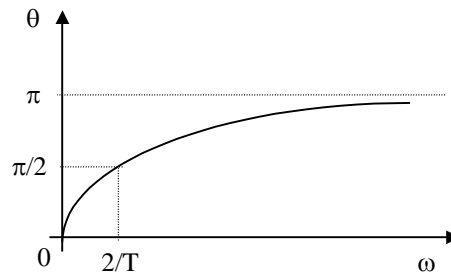


Figura 5.22 Compressão de frequência para transformação bilinear.

Isto significa que o espectro ω está comprimido todo em meia volta de z . Para $\sigma < 0$ a transformação mapeia para dentro desse círculo unitário, enquanto $\sigma > 0$ mapeia para fora do mesmo. Conclui-se que a transformação bilinear, apesar da não linearidade da compressão, permite representar filtros de qualquer faixa de frequência.

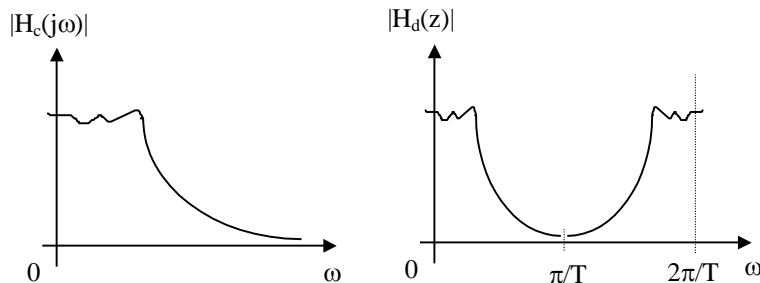


Figura 5.23 Filtro PB analógico Filtro PB discreto com transformação bilinear.

5.5 Filtro Notch

Como exemplo de aplicação, considere-se um filtro *notch* discreto, visando eliminar a fundamental (60 Hz) de uma onda quadrada unitária. A função de transferência do filtro *notch* ($Q=10$ e $G=1$) é:

$$F(s) = \frac{s^2 + 377^2}{s^2 + 37.7s + 377^2}$$

É possível utilizar a função "Bode(num,den)" do Matlab para traçar a resposta em frequência do filtro. No entanto vai-se sintetizar um filtro digital usando a transformação pela equação a diferenças e a transformação bilinear para obter a resposta temporal do sinal discretizado.

Para o primeiro caso, obtém-se a Transformada Z por substituição de s por $\frac{1-z^{-1}}{T}$, resultando:

$$H(z) = \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 + 377^2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 + 37.7\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) + 377^2}$$

Desenvolvendo o numerador e rearranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} + 377^2 \\ &= \frac{1}{T^2} [z^{-2} - 2z^{-1} + (1 + 377^2 T^2)] \end{aligned}$$

e desenvolvendo o denominador:

$$D(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} + 37.7\frac{1-z^{-1}}{T} + 377^2 = \frac{1}{T^2} [z^{-2} - (2 + 37.7T)z^{-1} + (1 + 37.7T + 377^2 T^2)]$$

Pode-se escrever a Função de Transferência Z na forma:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2} - 2 \cdot z^{-1} + (1 + 377^2 T^2)}{z^{-2} - (2 + 37.7T)z^{-1} + (1 + 37.7T + 377^2 T^2)}$$

ou ainda:

$$Y(z)[z^{-2} - (2 + 37.7T)z^{-1} + (1 + 37.7T + 377^2 T^2)] = X(z)[z^{-2} - 2 \cdot z^{-1} + (1 + 377^2 T^2)]$$

e, portanto, a recorrência temporal para um instante k qualquer é dado por:

$$y_{k-2} - (2 + 37.7T)y_{k-1} + (1 + 37.7T + 377^2 T^2)y_k = x_{k-2} - 2 \cdot x_{k-1} + (1 + 377^2 T^2) \cdot x_k$$

Verifica-se que os coeficientes do filtro dependem do intervalo de amostragem T. Vê-se também que o filtro combina as últimas três amostras do sinal de entrada (x_{k-2} x_{k-1} x_k) com as duas últimas de saída (y_{k-2} y_{k-1}) para calcular a nova amostra de saída (y_k), ou seja:

$$y_k = \{x_{k-2} - 2 \cdot x_{k-1} + (1 + 377^2 T^2) \cdot x_k - [y_{k-2} - (2 + 37.7T)y_{k-1}]\} / (1 + 37.7T + 377^2 T^2)$$

Uma vez escolhido T, pode-se calcular os coeficientes do filtro e aplicar a recorrência às amostras correspondentes do sinal. Sejam, por exemplo, 100 amostras por período $T = \frac{\tau}{100} = \frac{1}{6000}$.

Com isso resultam os seguintes coeficientes:

$$1 + 377^2 T^2 = 1.003948027$$

$$2 + 37.7T = 2.006283333$$

$$1 + 37.7T + 377^2 T^2 = 1.01023136$$

A recorrência para o filtro obtido pela equação a diferenças será:

$$y_k = \{x_{k-2} - 2 \cdot x_{k-1} + 1.003948027x_k - y_{k-2} + 2.006283333y_{k-1}\} / 1.01023136$$

Pode-se simular a resposta do filtro através do seguinte programa de Matlab:

```
% filtro notch de 60Hz
% onda quadrada 16 ciclos com 100 amostras cada
dt = 1/6000;
n = 1600;
t = 0:dt:n*dt;
x = sign(cos(2*60*pi*t));
% plot (t,x)           % x= sinal de entrada
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
pause
y = zeros(size(t));
for k = 3:n,
    y1 = y(k-1);
    y2 = y(k-2);
    x0 = x(k);
    x1 = x(k-1);
```

```

x2 = x(k-2);
y(k) = (x2 - 2*x1+ 1.00394027*x0 - y2 + 2.006283333*y1)/1.01023136;
end
plot(t,y)                % y= saída
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
pause
z=x-y;                   % z= fundamental
plot(t,z)
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
end

```

A resposta do filtro digital tendo como entrada uma onda quadrada unitária está mostrada a seguir. Notar que a amplitude da fundamental está atenuada, pois deveria ser de $4/\pi$. Esse erro é principalmente devido ao tamanho do passo de amostragem escolhido.

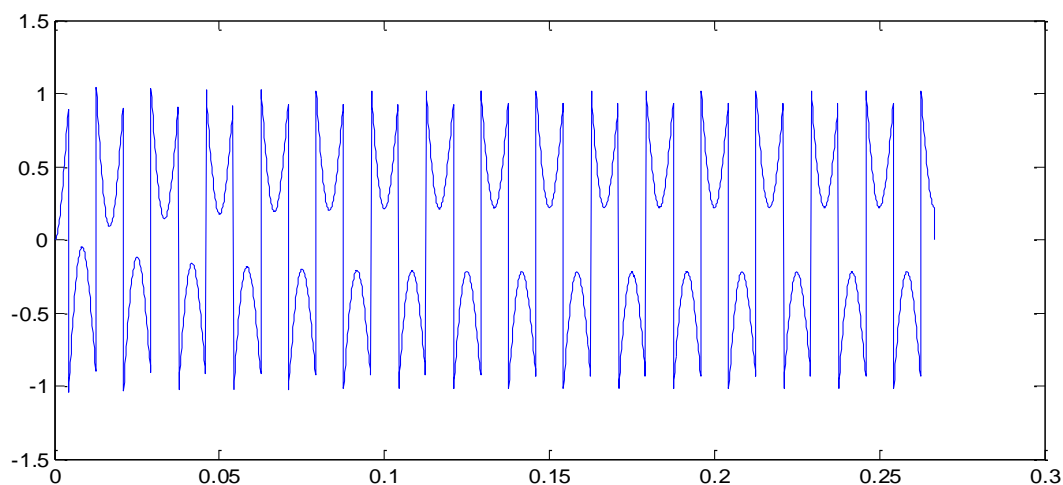


Figura 5.24 Saída do filtro baseado na equação a diferenças.

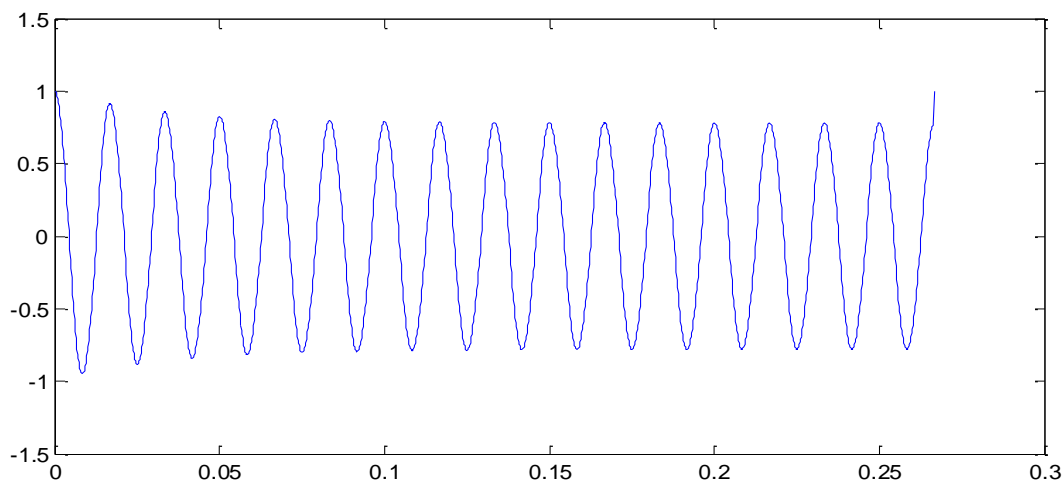


Figura 5.25 Diferença entre a onda quadrada de entrada e a saída do filtro.

O mesmo caso pode ser simulado usando parâmetros obtidos por transformação bilinear. Nesse caso deve-se substituir s por: $\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ e desenvolver os coeficientes do numerador e do

denominador. Uma maneira prática consiste em usar a seguinte rotina Matlab para obter os coeficientes: `[numd,dend] = bilinear(num,den,fs,fp);`

onde `num,den` são os polinômios em ordem decrescente de s ($s^2, s^1, s^0 \dots$);
`fs, fp` são as frequências de amostragem e de *pre-warping*^a;
`numd, dend` contém os coeficientes em ordem crescente de atraso ($z^{-1}, z^{-2}, z^{-3} \dots$).

```
% filtro notch de 60Hz
% 16 ciclos com 100 amostras cada
dt = 1/6000;
n = 1600;
t = 0:dt:n*dt;
x = sign(cos(2*60*pi*t));
plot(t,x)           % x= sinal de entrada
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
pause
y = zeros(size(t));
for k = 3:n,
    y1 = y(k-1);
    y2 = y(k-2);
    x0 = x(k);
    x1 = x(k-1);
    x2 = x(k-2);
    y(k) = 0.996870226*x2 - 1.989806076*x1 + 0.996870226*x0 - 0.99374045288*y2 + 1.989806076*y1;
end
plot(t,y)           % y= saída
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
pause
z=x-y;              % z= fundamental
plot(t,z)
axis([0 0.3 -1.5 1.5])
end
```

Nesse caso, a onda fundamental resultante assume a amplitude correta após alguns ciclos de convergência do filtro, indicando que o filtro baseado na transformação bilinear é mais preciso para a taxa de amostragem escolhida.

^a O parâmetro `fp`, em Hertz, indica uma frequência de ajuste para a qual a resposta de frequência, antes e depois da frequência `fp`, resulta exata. No modo

prewarped, a transformação bilinear mapeia plano- s para o plano z com
$$H(z) = H(s) \Big|_s = \frac{2\pi f_p (z-1)}{\tan\left(\frac{\pi f_p}{f_s}\right)(z+1)}$$
. Usando esta opção, a função bilinear mapeia

$$\omega = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\Omega \tan\left(\frac{\pi f_p}{f_s}\right)}{2\pi f_p} \right)$$

o eixo $j\Omega$ (de $-\infty \leq \Omega \leq \infty$) repetidamente em torno do círculo unitário ($e^{j\omega}$ de $-\pi \leq \omega \leq \pi$) usando

O uso deste recurso faz com que a frequência `fp` no domínio s seja mapeada para a frequência normalizada `fp/fs` no plano z .

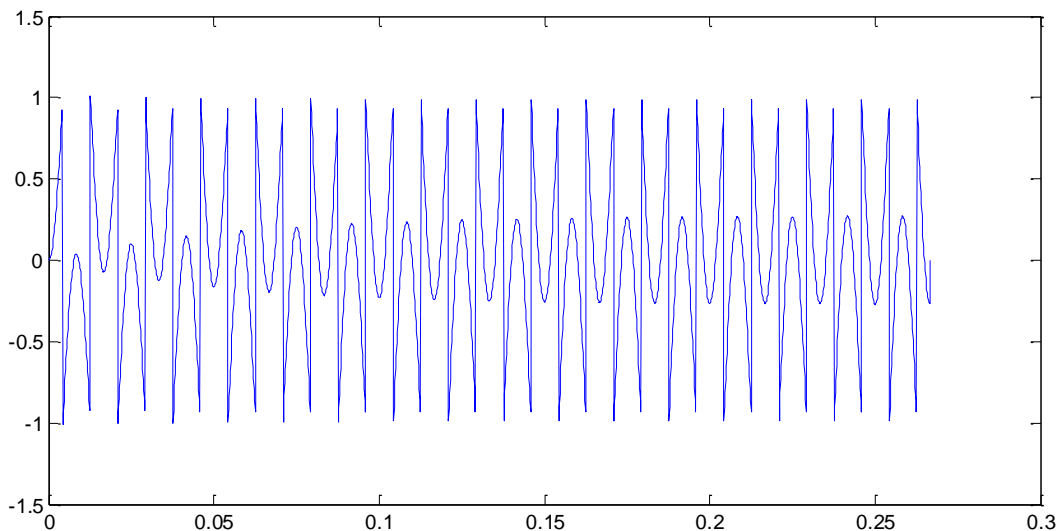


Figura 5.26 Saída obtida com filtro baseado na transformação bilinear.

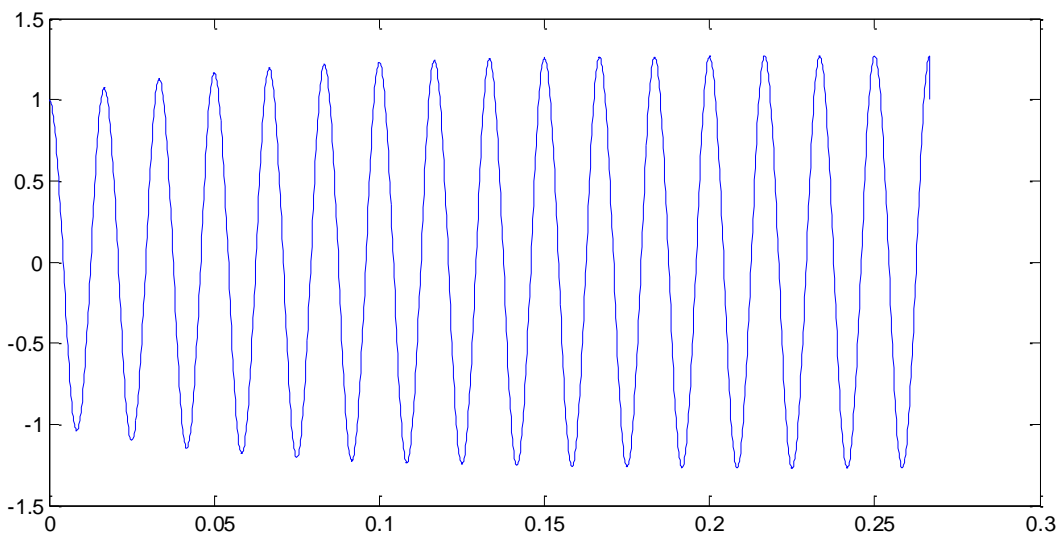


Figura 5.27 Diferença entre onda quadrada de entrada e a saída do filtro.

A precisão nos coeficientes da equação é muito importante para a qualidade do resultado. Por exemplo, alterando o cálculo de $y(k)$ apresentado no algoritmo anterior, utilizando “apenas” quatro casas decimais, para:

$$y(k)=0.9968*x_2 - 1.9898*x_1 + 0.9968*x_0 - 0.9937*y_2 + 1.9898*y_1$$

a saída do filtro se altera sensivelmente, com um significativo erro, principalmente de fase, como mostra a figura a seguir.

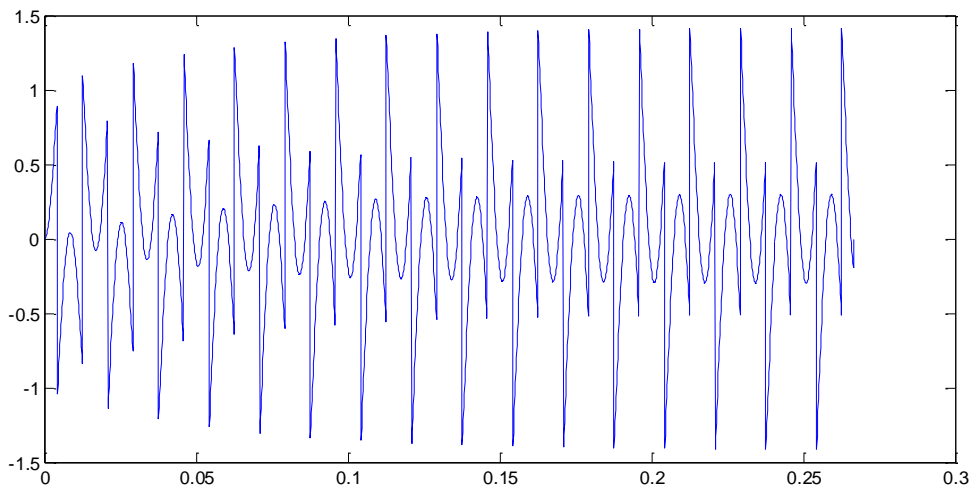


Figura 5.28 Saída do filtro com coeficientes com baixa resolução.

5.6 Filtro de Mediana

Enquanto os filtros lineares, como os vistos até aqui, são concebidos no domínio da frequência, considerando o espectro do sinal de entrada e a banda que se quer selecionar (para passar ou para rejeitar), os filtros não lineares utilizam outros princípios de filtragem e não possuem representação no domínio da frequência.

Filtros de mediana^b são filtros não lineares comumente utilizados para, por exemplo, refinar sinais de voz (chamados filtros de uma dimensão → 1-D) ou imagem (chamados filtros de duas dimensões → 2-D). Tais filtros permitem eliminar ruídos, preservando descontinuidades e seções monotônicas do sinal. O filtro de uma dimensão é implementado fazendo uma janela móvel de tamanho $2N+1$ deslocar-se sobre as amostras do sinal a ser filtrado, como mostra a Fig. 5.29. As amostras dentro da janela são ordenadas em ordem crescente e a saída do filtro é exatamente a amostra central da janela.

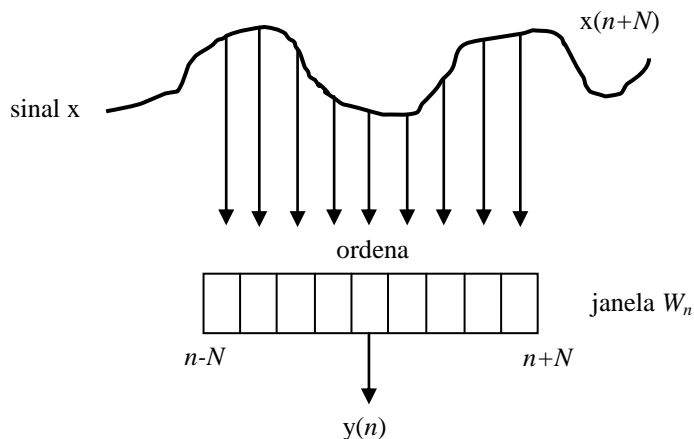


Fig. 5.29 Filtro de mediana

No processamento das amostras é necessário atribuir valores iniciais para os elementos da janela W_n . Geralmente a janela é preenchida com zeros ou com o valor da primeira amostra (x_0).

^b Richards, D. S. (1990). VLSI Median Filters. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing* (Jan.), vol. 38, no 1, pp.145-153.

Também é necessário aumentar de N valores a quantidade de amostras do sinal original. As N amostras adicionais contêm o valor da última amostral (x_j).

Outro parâmetro relevante é o tamanho da janela móvel $W_n=2N+1$. O efeito na variação de N é ilustrado a seguir através de resultados de simulação para a janela inicialmente preenchida com zeros.

A Fig. 5.30.a mostra um sinal em degrau (vermelho) ao qual se sobrepõe uma oscilação (ruído). O resultado do filtro de mediana, para N igual 5, 10 ou 15, é apresentado nas Figs. 5.30. (d, c, e b), respectivamente. Quanto maior a janela, mais reduzida é a oscilação, existindo um aumento no tempo de estabilização da resposta.

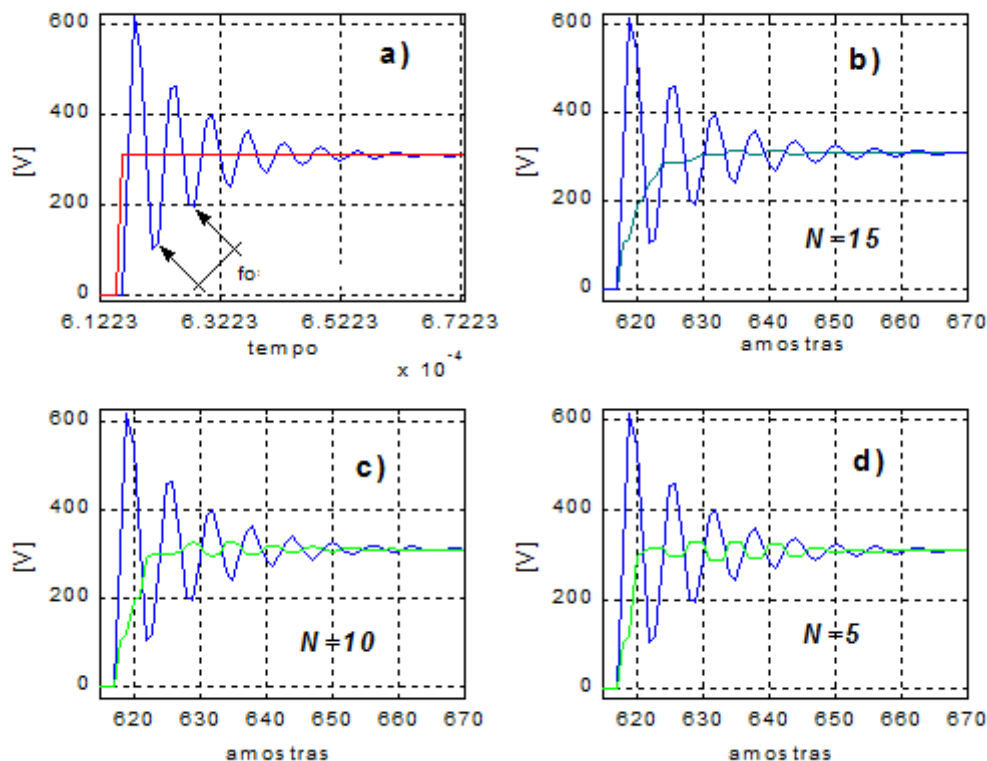


Fig. 5.30. Efeito da variação do tamanho da janela móvel.^c

É recomendado que o tamanho da janela seja maior ou igual ao número de amostras que compõem o fenômeno a ser eliminado do sinal em questão. No caso da figura 5.30, a amostragem ocorreu a cada $1\mu\text{s}$. A oscilação é atenuada em aproximadamente cinco ciclos, com duração aproximada de $30\mu\text{s}$. Isso sugere que o tamanho mínimo da janela necessário para eliminar as oscilações é conseguido com $N=15$ ou $W_n=31$. Note na Fig. 5.30.d que para $N=5$ (janela $W_n=11$) as oscilações são menos atenuadas.

Se o objetivo for reconstituir o sinal original (no exemplo, um degrau), o resultado para $N=5$ é o que mais se aproxima, embora contendo significativa oscilação. Pode-se filtrar novamente o sinal resultante, usando o mesmo tamanho de janela até obter o perfil original. A aplicação sucessiva do filtro é uma técnica usada para determinar a chamada estrutura-raiz de um sinal. Estruturas-raiz são

^c Figuras obtidas da Tese de Doutorado de Edson Adriano Vendrusculo, “Estudo e implementação de estratégia para minimização de sobretensões produzidas por inversores PWM em sistemas de acionamento de motores elétricos com cabos longos”, FEEC – Unicamp, 2001.

perfis que, uma vez sobrepostos, permitem reconstruir um dado sinal original. A teoria sobre estas estruturas é discutida por Gallagher e Wise (1981)^d.

O uso do filtro de mediana preserva as variações monotônicas do sinal original de tal forma que, subtraindo da própria mediana, somente resta o “ruído”. A subtração permite centrar o sinal resultante em torno do eixo zero.

A figura 5.31 mostra uma comparação entre o uso de um filtro de primeira ordem (bilinear) com as mesmas características descritas anteriormente (amostragem $T = 20$ ms; frequência de corte 5 rd/s = $0,8$ Hz). O sinal de entrada é uma senóide de amplitude unitária, $0,5$ Hz, à qual se sobrepõe um “ruído” amortecido (9 Hz). Note que o filtro de mediana, finalizado o transitório do ruído, produz um erro praticamente nulo. Já o filtro linear introduz um erro de fase e de amplitude bastante elevado. O tamanho da janela do filtro de mediana, como já dito, altera esses resultados. Uma janela maior melhora a eliminação do ruído, mas introduz um erro nas regiões de mudanças de derivada do sinal (ou seja, quando o sinal deixa de ser monotônico).

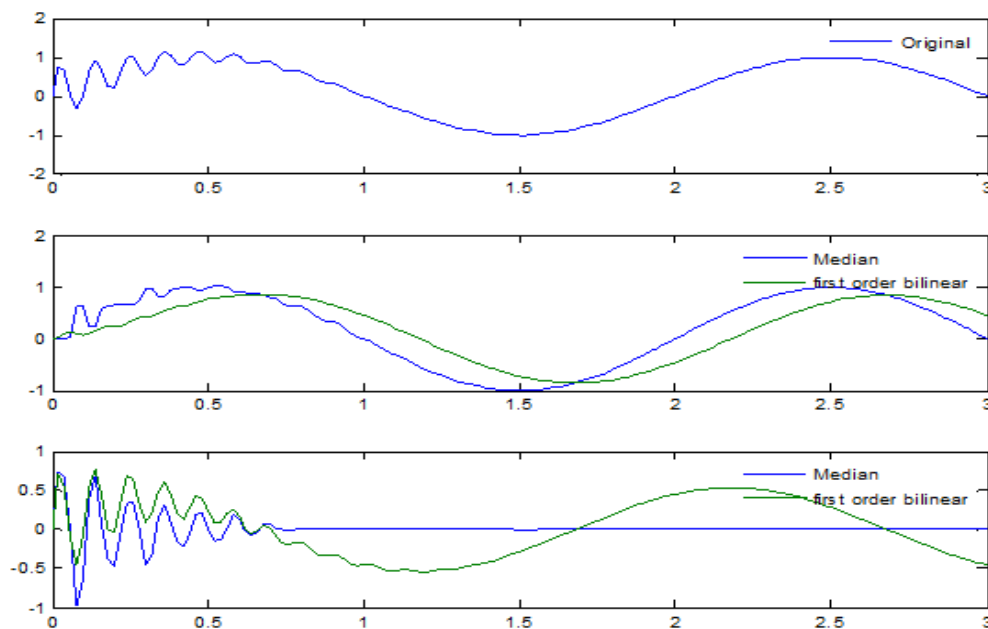


Figura 5.31 Comparação de filtragem por filtro de primeira ordem e filtro de mediana. De cima para baixo: sinal original; saídas dos filtros (azul – mediana; verde – primeira ordem/bilinear); erro entre o sinal original e a saída do filtro.

A figura 5.32 compara os mesmos resultados para uma entrada quadrada, com amostragem em 20 ms. Novamente o desempenho do filtro de mediana é similarmente eficaz para extrair o ruído e muito superior quando o sinal está em regime permanente, mesmo nas transições abruptas que não podem ser seguidas pelo filtro linear.

A principal limitação para uso do filtro de mediana (e de outros filtros não lineares) é a dificuldade de projeto a partir de informações do comportamento espectral de um sinal. Dado que não existe uma representação no domínio da frequência, não é possível, a priori, especificar figuras de mérito como banda passante ou fator de qualidade.

^d Gallagher, N. C. and G. L. Wise (1981). A Theoretical Analysis of the Properties of Median Filters, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing* (Dec.), vol. ASSP-29, no 6, pp.1136-1141.

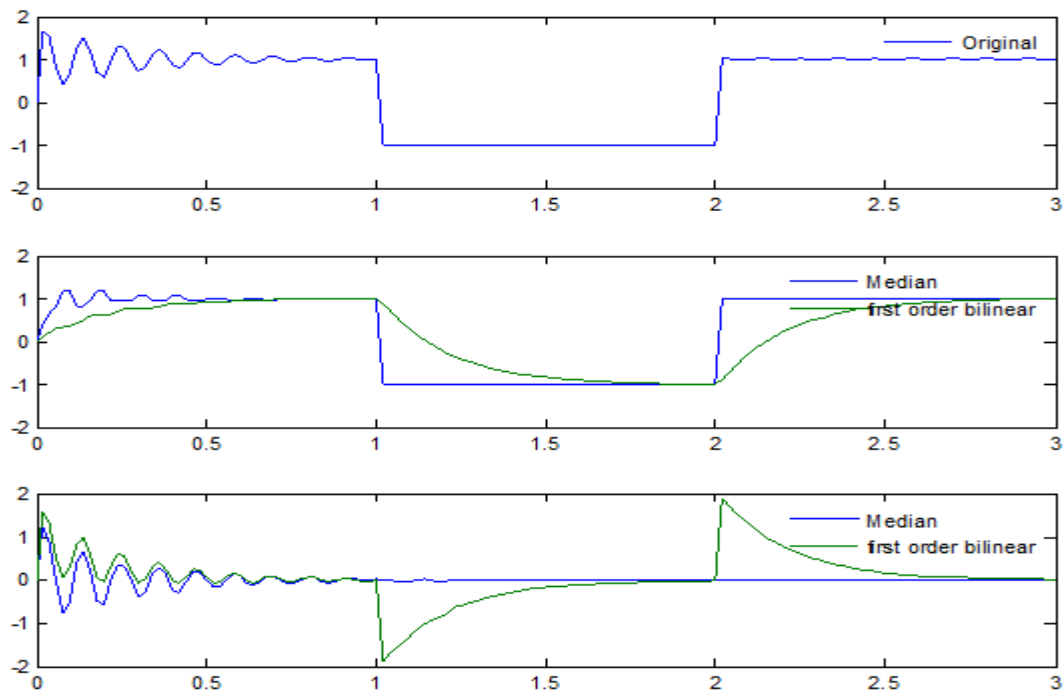


Figura 5.32 Comparação de filtragem por filtro de primeira ordem e filtro de mediana. De cima para baixo: sinal original; saídas dos filtros (azul – mediana; verde – primeira ordem/bilinear); erro entre o sinal original e a saída do filtro.

BIBLIOGRAFIA DA PARTE B

N. Mohan, T.M. Undeland, W. P. Robbins. "Power Electronics: Converters, Applications and Design" John Wiley&Sons 1989.

W. Pereira, O. K. Tanaka. "Elementos de Estatística". Ed. McGraw Hill do Brasil, São Paulo, 1984.

Paul A. Lynn. "An Introduction to the Analysis and Processing of Signals". Publ. SAMS Macmillan Press Ltd, Londres , 2a. ed. 1982.

Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, Ian T. Young. "Signals and Systems". Prentice-Hall Intern. Ed. 1983.

G.H. Tomlinson. "Electrical Networks and Filters - Theory and Design". Ed. Prentice Hall, 1991.